实数集的程序数子集

陈必红

（深圳大学数学与计算科学学院，广东深圳　518060）

摘要：实数集是不可数集，其中包括了有理数集和无理数集。无理数的小数部分是无限不循环的。无理数又可分为两类，其中一类虽然无限不循环，却有规律可循，因此可用有限长度的程序语言对其进行描述或代表，称这类实数加上有理数所组成的集合叫程序数集，这个子集不仅包含有理数集，还包含了所有人类使用的无理数。这个子集形成一个数域，因此可构成它支持的线性空间。这个子集是可数集，这就不会具有不可数集的那些相应的性质。本文还提出了一个悖论，就是非程序数并不存在。

关键词：基础数学；域论；程序数；集合论；实数

中图分类号：O153.4　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1674-2850(2008)00-0607-4

The program number subset of the real number set

CHEN Bihong

(*College of Mathematics*, *Shenzhen University*, *Shenzhen*, *Guangdong*　518060)

Abstract: The real number set is uncountable set which includes rational number and irrational number. Irrational numbers have decimal expansions that neither terminate nor become periodic. But the irrational numbers can be divided in to two kinds. One kind of them which includes real number with regularity so can be descript as program language with limited length adding rational number subset is defined as program number set in this paper. The set includes all rational numbers, and also includes irrational numbers used by human being. The set forms a number field, so a linear space can be constructed on it. The set is countable, so it does not have the features owned by real number set.

Key words: fundamental mathematics; field theory; program number; set theory; real number

0　引言

本文先研究［0，1）区间里的数。在这个区间里存在有理数和无理数，无理数就是无限不循环小数[1]。但是，在无理数的无限不循环数中，有的也是有规律的无限不循环，既然有规律，就可以编写一个C++程序无限地逼近它。

例如，令 $a=0.110\,100\,100\,010\,000\,1\cdots$，$a$ 就是一个无限不循环小数，但是它是有规律的，头两个 1 之间没有 0，第二个和第三个 1 之间有一个 0，第三个到第四个 1 之间有两个 0，以此类推。既然有规律，就可以编写如下的一个C++程序来逼近 a[2]：

```
double nn 1 (int n) {
        double s=0;
        int k=1;
        int j=1;
        for (int i=0; i<n; i++) {
              s+=1/power(10, k);
              k+=j;
              j++;
        }
        return s;
}
```

作者简介：陈必红（1955－），男，博士，讲师，主要研究方向：观测过程理论、信息论基础理论. E-mail：cbhmath@hotmail.com

上面的 C++函数 nn1 需要一个自变量 n 来代表所需的精度，将根据这个精度来返回 a 的近似值。

从信息论的角度看，上面这段 C++程序共由 108 个字符构成，因此可以视为一个字符串。这个字符串如果用通信手段发送给另一个 C++程序员，则他只需要分析这段程序，就可以知道这段程序是在描述一个数 $a=0.110\,100\,100\,010\,000\,1\cdots$，也就是说，这段程序携带了这个无理数的完全信息。

本文将这样的能够完全由一段 C++语言或者任何其它的程序语言等字符串手段描述的数，称为程序数，用 CBH 来表示这个集合。当然，除用 C++语言描述的程序数外，下面还要讲到程序数还有其它的描述类型。

1 字串合并数

目前在计算机技术中，所有的信息都是用整数来表示的。计算机中处理得最多的数据类型是字符串，简称字串。比如“AB”就是一个字串，在现在常用的 ASCII 编码中，字符‘A’用整数 16 进制的 0x41（在本文中十六进制数都用 C 语言的标准加上一个 0x 的前缀）来表示，而字符‘B’则用 0x42 来表示，因此，对于字串“AB”，可以把它们的 16 进制数拼在一起，构成一个大的十六进制数 0x4142 来代表这个字串。而 0x4142 当然是一个整数，称它为字串“AB”的合并数。再比如说，数字字符‘0’在 ASCII 编码中用十六进制数 0x30 表示，而字符‘1’则用 0x31 表示。因此，对于自然数 10，也可以用字串“10”的合并数 0x3130 来代表它，也就是说，对于任何一个自然数，都可以先将它们用 ASCII 的字串表示，然后算出这个字串的合并数，称其为此自然数的合并数。在这种情况下，建立了一个从自然数到它的合并数的映射。就是说，每给定一个自然数，就有一个相应的自然数是它的合并数，与之对应。

而对于引言中给出的 C++程序，这个源程序也是由一系列字符构成的字串，也就能够映射到它的合并数。因此，用这种办法就把一个无理数映射到了一个自然数，而且这个自然数一定和上面用 ASCII 码表示的全体自然数的各个合并数不一样。

从信息论的角度考虑，如果一个方程只有一个解，则这个方程就等于携带了这个解的全部信息。如果这个解是一个无理数，把这个方程发送给一个数学家，他就能够根据方程唯一地确定将要发送给他的无理数是什么。

例如，当打算把无理数$\sqrt{2}$发送给对方时，只需要把代表一个方程的字串“x • x＝2（x＞0）”发送给对方，对方就知道要告诉他的是无理数 $x=\sqrt{2}$。也就是说，字串“x • x＝2（x＞0）”携带了实数$\sqrt{2}$的全部信息，信息接收者可以根据这个信息编写程序，以任意的精度获得它的近似值。但是字串“x • x＝2（x＞0）”的合并数是自然数，因此，在这里把实数$\sqrt{2}$也映射到了一个自然数上。

如果想发送给对方圆周率 π，就告诉对方“任何一个平面上的圆的周长比上直径”，这个字串携带了 π 的全部信息，因此这里也就用此字串的合并数代表了实数 π。

2 程序数的定义

定义 1 在实数集 R 中，凡是能够用有限长度的字串完全表示其信息的数，被称为程序数，这些数的集合，构成了 R 的一个子集，用 CBH 表示。

由此定义知道所有的整数、有理数及相当一部分无理数都是程序数。

因此，程序数一定能够用一个有限长度的字串表示，这个字串是不是唯一的呢？上一节用了各种方法，产生的字串规则是不一样的，比如直接用数字表示，或用方程表示，或用一句话表示，或用一个 C++程序表示，它们之间会不会导致恰巧有两个程序数映射到同一字串上呢？一般不会，但为了防止这一点，也可以在不同的字串描述前面加一个说明性前缀，用 C++语言的注释符号“/**/”来表明，比如“/*数字*/123”代表自然数 123，“/*方程*/x • x＝2（x＞0）”代表$\sqrt{2}$，“/*文字描述*/

任何一个平面上的圆的周长比上直径”代表圆周率 π 等。当然，同一个程序数可能有不同的表示办法，因此有可能同时映射到多个自然数上。

而字串的唯一性，导致了字串合并数的唯一性，因此可以把任何一个程序数映射到至少一个自然数上。当然，可以选择其中的一个作为标准。

定理 1 对于程序数集合 CBH，存在着一个单射将其映射到自然数集合 N，就是说，对于每一个程序数，唯一的有一个自然数与其对应。

定理 2 程序数集合 CBH 是可数集合[3]。

定理 3 程序数集合 CBH 对于加、减、乘、除四则运算封闭。

定理 4 程序数集合 CBH 是一个数域。

因此，可以用程序数作为数域来构成一个线性空间。

一个问题是，程序数数列的极限如果存在，它是不是程序数呢？一般不是。因为任意实数都可以用有理数序列逼近。

根据传统测度的定义，因为自然数 N 的测度为 0，因此程序数集合 CBH 的测度也就是 0。

但是，如果一个程序数数列本身是有规律的，或者说，这个数列可以用有限字长的字串来描述(哪怕这个字串是一本书)，则这样数列的极限也就是程序数。

而在实用中，经常需要描述的极限值，常常是微分方程（包括常微分方程和偏微分方程）的解函数在某一点上的函数值，这当然是可以用有限字长的字串描述的。

定理 5 任何一个可用有限字长的字串描述的微分方程的解在相应的线性空间中的任何一点的函数值，是程序数。

因为程序数可数，程序数集合的测度为零，所以程序数只是实数集合 R 中的很小一部分。但是，人类社会似乎只是和程序数打交道，因为每一个人的生命有限，他所处理的信息量和接收的信息量都有限。

3 一个悖论

定义 2 将实数集合 R 中的不属于程序数 CBH 的所有数构成的集合，称为非程序数。

但是，怎么能够知道非程序数是存在的？当然可以从传统测度的角度出发来证明这一点。正如当年物理学家分成了两派，一派不相信镭这种元素的存在，虽然另一派用严格的理论方法证明了镭的存在，但是这一派不信，因此就要求另一派拿出 1 g 具体的镭来看一看。于是就有了居里夫人炼出 1 g 镭的佳话。

如果这里给出如下一个悖论：

悖论：非程序数不存在。

而且，如果悖论提出者坚持要求反对者给出一个具体的非程序数，反对者就很麻烦。

因为，如果真的拿出一个数，这个数被完全地描述了，而且证明了它的确是非程序数。但是相应的描述，相应的论文或者学术著作，是无限字长的么？如果那样，一个人一辈子也写不完。而如果是有限字长的，又把那个数描述清楚了，那么按定义它就是程序数，而不是非程序数。

当年有人提出悖论非有理数不存在，则有人拿出了$\sqrt{2}$，就成功地证明了非有理数的存在。但是，非程序数就没有办法这么做。

甚至在概率论的试验中，如果样本空间就是程序数集呢？这下麻烦了，因为程序数集的测度是 0，则广义测度也是不好定义的。

4 结语

本文提出了一个常用的程序数数集 CBH，但是，由此会引出一系列的麻烦，这些麻烦都是需要在

今后进行研究和讨论的。程序数是有意义的，它是人类社会能够直接接触到的所有实数，而且是可数集合。

［参考文献］(References)

［1］ 叶其孝，沈永欢. 实用数学手册[M]. 北京：科学出版社，2001.
YE Q X，SHEN Y H. Pragmatic mathematics handbook[M]. Beijing：Science Press，2001. (in Chinese)

［2］ TIM J B. 实用 Visual C＋＋6.0 教程[M]. 何健辉. 北京：清华大学出版社，2000.
TIM J B. Visual C＋＋6.0 practical[M]. HE J H. Beijing：Tsinghua University Press，2000. (in Chinese)

［3］ 杜珣. 现代数学引论[M]. 北京：北京大学出版社，1996.
DU X. Introduce to modern mathematical theory[M]. Beijing：Peking University Press，1996. (in Chinese)