将线性空间中数乘运算替换为对位乘运算

陈必红

深圳大学数学与计算科学学院，广东省深圳市 邮编 518060

摘要：在线性空间的定义中，有一个数乘的运算，共有四个基本性质或者四条公理。本文则尝试用对位乘运算来取代数乘运算。例如，对于具体的一个实数向量 x=(5,3), 如果是用数 2 来乘它，得到 2x=(10, 6). 但是现在禁止做数乘，却可以做一个对位乘，就是用向量 y=(2,2)与 x=(5,3)对位相乘，仍然能够得到结果 x*y=(10,6)。本文将现在流行的线性空间的定义做了这样的改动后，称之为对位乘空间。对位乘空间禁止数乘，却多定义了一个空间中的对位乘，因此可以完成原有线性空间的所有功能。不仅如此，对位乘还可以进行扩张，导致对位乘空间具有原线性空间所没有的许多性质。

关键词：线性代数；线性空间；向量空间；对位乘

中图分类号：O151.2

Substitute Correspondence Multiplication for Scalar Multiplication in Linear Space

CHEN Bihong

College of Mathematics of Shenzhen University, Shen-zhen, Guangdong 518060

Abstract: In the definition of linear space, there is a scalar multiplication operation which have four properties witch are also called four axioms. This paper tries to replace the scalar multiplication with correspondence multiplication (CM). For example, given a real number vector x=(5,3), if use 2 to multiply it, we get 2x=(10,6). But now the scalar multiplication is prohibited and the CM is permitted, then use vector y=(2,2) do CM with x=(5,3), we also can get x*y=(10,6). After do such a change to the definition of linear space, we call the new space as correspondence multiplication space or CBH space. In CBH space, the scalar multiplication is prohibited but a correspondence multiplication operation is defined. The CBH space can have all functions which the linear space has. Furthermore, the CM can be enlarged to lead the CBH space to have the properties which traditional linear space does not have.

Key words: Linear algebra; linear space; vector space; Correspondence Multiplication

0 引言

线性空间或称向量空间的概念现在已经深入到许多数学分支，包括数学分析和数值计算及概率统计等领域[1]。

线性空间的基本定义是这样[2]，首先要有一个集合V，里面的元素都叫向量，并在元素上定义了一个抽象的加法运算，满足交换率，结合率，具有一个 0 元素，每一元素还有唯一的负元素，这样四条性质。但这时V还不叫线性空间，还只能够叫交换群[4]。

如果要使V成为线性空间，则必须有另外一个称之为域的集合F对之进行支持[5]。例如，有理数域，实数域，复数域，是常见的三种域。但是也还是有其它的域的。一个集合被称之为域，是说在它上面定义了抽象的加减乘除四则运算。

所谓F对V的支持，就是说在V上定义了一个数乘的运算，就是说，V中的一个元素和F中的一个抽象数，能够通过运算映射到V上的唯一的某一个元素。这样的数乘运算，也满足

作者简介：陈必红，男，1955 年生，清华大学博士，主要研究方向是观测过程理论，信息论基础理论. E-mail: cbhmath@hotmail.com.

四条性质，就是向量对数乘的分配率，数乘对向量的分配率，抽象的数“1”数乘任何向量还是那个向量，还有一个数乘对数的结合率，是说两个数相乘后再数乘一个向量，与先用其中一个数数乘那个向量，再用另一个数数乘那个向量，结果是一样的。在F的支持下，V就被定义成一个线性空间[6]。

那么，数乘的运算有可能在某种程度上禁锢了人们的想法，这有可能是导致目前人类在图像识别问题上停滞不前的原因。而且定义一个线性空间需要有一个域的支持，结构略显复杂。

正因为如此，本文试图定义一种新式的向量空间 V，无须一个数域的支持，也禁止数乘，但是加进一个对位乘的运算，对位乘的运算是定义且作用在 V 上的，因此结构也相对简单一些。

1 具体向量的对位乘

定义 1. 给定两个R^n上的n维向量$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$，则称向量$(x_1y_1,x_2y_2,\ldots,x_ny_n)$是$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$的**对位乘**，记作$\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}$. 此外，对于$n$个数都一样的向量，例如都是$k$，称其为**标向量**，标向量在本文中用数$k$加上一下划线来表示，例如$\underline{1}=(1,1,\cdots,1)$。$R^n$中的全体标向量构成的子集称为**标向量子集**，或简称为**标子集**，记作K，即$K=\{(a,a,\cdots,a)\,|\,a\in R\}$，当然有$K\subset R^n$。任给一个向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，如果其中每一个数都不为零，则称其为**无零向量**，否则称其为**有零向量**。

例如，假设 $\boldsymbol{x}=(1,2,4)$, $\boldsymbol{y}=(2,2,3)$, 则 $\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}=(2,4,12)$。

任给$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in R^n$，对位乘满足性质：

1. $\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}*\boldsymbol{x}$;
2. $(\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y})*\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}*(\boldsymbol{y}*\boldsymbol{z})$;
3. $\boldsymbol{x}*(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}*\boldsymbol{z}$;
4. $\underline{1}*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

定义 2. 设$\boldsymbol{x}\in R^n$为一无零向量，则它的每一个分量的倒数都存在，将这些倒数按原来的次序构成的向量，称为$\boldsymbol{x}$的**倒向量**，记为 $1/\boldsymbol{x}$或$\dfrac{1}{\boldsymbol{x}}$ 或$\boldsymbol{x}^{-1}$。有零向量的倒向量不存在。设$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n$，$\boldsymbol{y}$是无零向量，则可称$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$的倒向量的对位乘的结果是$\boldsymbol{x}$**除以**$\boldsymbol{y}$，记作$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y}$或$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$，即 $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\triangleq\boldsymbol{x}*\left(\dfrac{1}{\boldsymbol{y}}\right)$。$k$个$\boldsymbol{x}$相互对位乘被称为$\boldsymbol{x}$的$k$**次幂**，记为$\boldsymbol{x}^k$。规定$\boldsymbol{x}^0=\underline{1}$。如果$\boldsymbol{x}$是无零向量，$k$是正整数，规定$\boldsymbol{x}^{-k}=\left(\dfrac{1}{\boldsymbol{x}}\right)^k$。

例如，设 $\boldsymbol{x}=(1,2,4)$, $\boldsymbol{y}=(3,4,4)$, 则 $\dfrac{1}{\boldsymbol{x}}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$，$\dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}=(3,2,1)$。

定义 3. 设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$，将$\boldsymbol{x}$的各个分量都加起来得到的数，称为$\boldsymbol{x}$的**和数**，记为$h(\boldsymbol{x})$，即$h(\boldsymbol{x})=x_1+x_2+\ldots+x_n$。任给$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n$，定义$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$的对位乘的和数为它们的**内积**或者**数量积**，记为$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$，即 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=h(\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$。

也就是说，本文的观点认为现在流行的内积运算，定义得太快了一些，应当是先有对位乘，然后再取和数。

下面还可以利用定义 1 中定义好的标向量子集来定义向量组的线性相关性及向量的线性组合。

定义 4. 假设向量$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\in R^n$，如果存在标向量$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_m\in K\subset R^n$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{k}_1*\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{k}_2*\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{k}_m*\boldsymbol{\alpha}_m \tag{1}$$

则称$\boldsymbol{\beta}$在标子集K下为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$的**线性组合**，或者$\boldsymbol{\beta}$可在标子集$K$下被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$**线性表示**。如果存在不全为零的标向量$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_m\in K\subset R^n$导致

$$\boldsymbol{k}_1*\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{k}_2*\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{k}_m*\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{o} \tag{2}$$

成立，则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$在标子集$K$下**线性相关**，否则，如果只有当$k_1,k_2,\ldots,k_m$都是零向量时，才有(2)式成立，则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$在标子集$K$下**线性无关**。

2 抽象的对位乘

上一节是在具体的R^n空间上定义对位乘。本节则要在特别抽象的一个空间或者集合上定义对位乘。

定义 5. 假设有一个集合V，在其上定义了加法运算，导致对任何的$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$，这个加法运算满足交换率$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$，结合率$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$，存在零元素$\boldsymbol{o}\in V$使得$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{\alpha}$，存在$\boldsymbol{\alpha}$的负元素$(-\boldsymbol{\alpha})$使得$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{o}$。也就是说，$V$是一个加法交换群。现在$V$上再定义一个被称为**对位乘**的运算，用运算符*来表示，能够将任何V中的两个元素映射到V的一个元素，这个对位乘运算满足交换率$\boldsymbol{\alpha}*\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}*\boldsymbol{\alpha}$，结合率$(\boldsymbol{\alpha}*\boldsymbol{\beta})*\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}*(\boldsymbol{\beta}*\boldsymbol{\gamma})$，还有$\boldsymbol{\alpha}*\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$，还有对加法的分配率$\boldsymbol{\alpha}*(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}*\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}*\boldsymbol{\gamma}$，存在着“1”元素$\boldsymbol{e}$使得$\boldsymbol{\alpha}*\boldsymbol{e}=\boldsymbol{\alpha}$。对于任何的$\boldsymbol{\alpha}\in V$，如果存在$\boldsymbol{\beta}\in V$，使得$\boldsymbol{\alpha}*\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{e}$，则称$\boldsymbol{\alpha}$为**可逆向量**，这时称$\boldsymbol{\beta}$为$\boldsymbol{\alpha}$的**逆向量**，否则称$\boldsymbol{\alpha}$为**无逆向量**。当然，零向量$\boldsymbol{o}$一定属于无逆向量。这个时候称集合$V$为一个**半域**，是因为它不能够保证除零向量外其它的元素都可逆。

我们知道老的线性空间的定义，是一个交换群上必须有一个数域或者域的支持。我们可以将交换群视为水泥，支持线性空间的数域或者域则视为钢筋，也就是说，水泥用钢筋一支撑，一个空间就立起来了。而下面我们要定义的新的空间，并不用另外的钢筋，而是将V中的一个子集抽出来起钢筋的作用，也可以撑起一个空间。因此就有下面的定义。

定义 6. 给定一个半域V，给定V的一个子集$K\subset V$，称它为**标向量子集**，或者简称为**标子集**，集合里的向量都称为**标向量**。对于已经定义好标子集K的半域V，称之为在标子集K支持下的**对位乘空间**，或**陈必红空间**，或 **CBH 空间**，用$V(K)$表示。

也就是说，如果将空间比做社会，元素比做人，则定义一批人为特权阶层，则一个空间结构才建立起来了，否则只不过是一个半域而已。当然，不同的人成为特权阶层，导致不同的空间结构，当然，也可以全体人都属于特权阶层。

定义 7. 给定一个对位乘空间$V(K)$，对于给定的向量$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V$，如果存在标向量$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_n\in K$，使得$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{k}_1*\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{k}_2*\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+\boldsymbol{k}_n*\boldsymbol{\alpha}_n$，则称$\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$的**线性组合**，或者说$\boldsymbol{\beta}$可被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$**线性表示**。如果存在不全为零向量的标向量$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_n$导致

$$\boldsymbol{k}_1*\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{k}_2*\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+\boldsymbol{k}_n*\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{o} \tag{3}$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$**线性相关**，否则称此向量组为**线性无关**。

传统的线性空间V，都是要受到一个数域F的支持的，F有可能是有理数，实数或者复数，或者其它的域。或者说，一个交换群需要一个外来的进口的集合的支持才能够成为线性空间。下面要证明的是，在定义了 CBH 空间之后，任何的传统的线性空间，去除掉数域F的支持，完全地自力更生艰苦奋斗，从自己的元素中抽出一个子集来起到数域的作用，必然能够建立起和原来的线性空间完全同构的 CBH 空间。

那么，这里要做的事情，就是需要定义V上的一个标子集K，和原来支持它的数域形成一一映射的关系。不仅如此，还要在V上定义一个对位乘运算，使得标子集K中的元素与V

中的元素进行对位乘，在性质上完全类似于原线性空间的数乘的作用。这样定义出来的 CBH 空间，完全和原线性空间同构。不仅如此，其中和原线性空间的数乘相对应的对位乘，却可以扩展到 CBH 空间中的任何两个元素之间。或者可以说，功能比原线性空间更多了。

我们可以对由数域 K 支持的原线性空间按如下定义对应的 CBH 空间。

定义 8. 对于一给定的由数域F支持的传统的n维的线性空间V（无限维线性空间的扩展类似），它必然存在着一组n个线性无关的向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$作为基底，能够线性表出$V$的任何向量。$V$的任一向量$\boldsymbol{\beta}$可表示为$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$，其中$(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in F^n$为向量$\boldsymbol{\beta}$在基底$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标向量。因此在这一组基底上定义$V$的任何两个向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$都有一个对位乘运算将它们映射到$V$中的一个向量$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}_1*\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\gamma}$在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标向量为$(k_1j_1,k_2j_2,\ldots,k_nj_n)$，其中$k_1,k_2,\ldots,k_n$是$\boldsymbol{\beta}_1$的坐标向量，而$j_1,j_2,\ldots,j_n$是$\boldsymbol{\beta}_2$的坐标向量。然后定义所有的在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$基底下的坐标向量形如$(k,k,\ldots,k)$的向量为**标向量**，构成**标向量子集**$K$。则$V$在此标子集$K$的支持下定义的CBH空间$V(K)$，与在数域$F$支持下的原线性空间$V$同构，称这样的空间为CBH**二型空间**，简称为**二型空间**，记为$V(K,F,n)$。

这样定义的与原线性空间同构的 CBH 空间，一个重要的特点，就是将原来的数乘扩大成对位乘之后，将此乘法扩大到空间的任意两个元素之间了。

3 潜在的应用

现在还是回到第 1 节的对具体的向量的对位乘定义，用那种办法是一种无聊的数学游戏呢？还是会有实际的用处呢？将从几个方面进行讨论。

（1） 在点阵图像方面的应用

只讨论黑白图像，这样，任何一个点阵图像都可以用一个代表灰度的矩阵来表示，假设这个矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中的所有元素a_{ij}代表那个象素点的灰度值。那么，用传统的矩阵数乘的定义，用一个正数k来数乘矩阵$\boldsymbol{A}$，就是矩阵$\boldsymbol{A}$的每一个像素的灰度都增加了一个倍数。而如果用本文的办法，就是禁止数乘，只允许做对位乘，则同样的操作是用一个常数矩阵$\boldsymbol{K}$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} k & k & \cdots & k \\ k & k & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & \cdots & k \end{pmatrix}$$

与灰度矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作对位乘得

$$\boldsymbol{K}*\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & k & \cdots & k \\ k & k & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & \cdots & k \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

那么，相比传统的表示办法，岂不是更加麻烦了？但是，如果从实现的角度看，实际的操作中对每一个象素点的点的亮度的变化，虽然理想状态是每一个象素原亮度乘上同样的数，但是，不可能没有干扰，因此，矩阵 $\boldsymbol{K}$ 在受到干扰后，就不是一个常数矩阵，但是，

这个时候对位乘的表示办法，更容易用来分析干扰的效果，及研究怎样减少干扰的具体技术。

另一方面，甚至为了表达某种艺术效果，故意地将矩阵 $\boldsymbol{K}$ 弄成不同的背景水印图案，这样就扩张成更为广泛的对位乘了。

(2) 在矢量图方面的应用

所谓矢量图，也就是一些直线的集合。现在的计算机的字库都是用矢量图的方式存储和显示的。为了讨论简便起见，先看图 1 所示的一个简单的五角星图像，直线沿箭头方向前进，画的顺序是 a→b→c→d→e→a，是一个封闭图形。

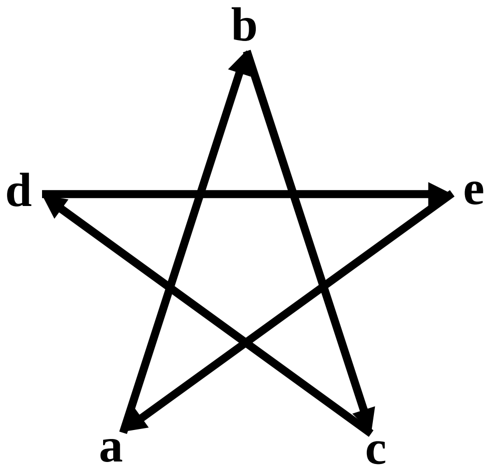

图 1 一个标准的五角星的矢量图

假设a,b,c,d,e的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4),(x_5,y_5)$。因此我们可以将画线过程的这六个点，从起始点到终点，a,b,c,d,e,a的坐标，存放成一个矩阵$\boldsymbol{A}$为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}。$$

有了矩阵 $\boldsymbol{A}$，可以编制一个绘图程序将五角星绘出。而如果拿一个数 k 数乘 $\boldsymbol{A}$，再用绘图程序绘出呢？我们看到的将是一个按比例缩放的五角星，而对于人的识别来说，认为这个比例是不包含任何信息的，因为当人眼距图像近的时候，图像在视网膜上当然就大。

但是，按本文的观点，禁止数乘，因此数乘就由一个标量矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行对位乘。效果也一样。不过，这个标量矩阵 $\boldsymbol{K}$，就有可能发生更多的变化，从矩阵中的每一个数都是常数 k 变化为每一个数都稍有不同。例如，假设有幼儿园老师将上面的五角星挂图挂出来，要求下面的儿童照画一个。则一个儿童绘出的五角星有可能如图 2 所示。

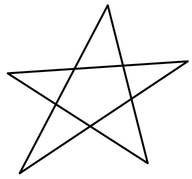

图 2 儿童绘出的五角星

当幼儿园阿姨看到这个五角星后，有可能会认为儿童绘得正确，因此夸奖儿童做得好。但是，上面的图形明明出现了畸变，这个畸变怎么解释呢？如果用对位乘的解释，就是认为与上面的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作对位乘的常量矩阵 $\boldsymbol{K}$，畸变了，数字改变成不是常数 k 了。当然，如果是要将儿童训练成一个优秀的画家的，可以经过长期训练，使得他在绘图临摹时的这个对位乘矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与常数接近，或者说，畸变很小。

实际上，不仅是这个五角星，任何一种文字也都是一个矢量图，为什么小学教师看到小学生写的歪歪扭扭的字，会认为这个写得对，那个写错了呢？现在的图像识别中的普遍接受的观点是人脑中抓住了这些字的特征。但是，本文则认为存在着另一种可能，就是人还是在大脑中进行简单的匹配的，并没有什么抓住特征这样的事情。只不过在一种简单匹配的过程中，对图形矩阵的对位乘矩阵，原本应当是常量矩阵的，但是，大脑中允许这个对位乘矩阵在一定程度上偏离常量。

其实，一个婴儿出生之后不久，就可以认识他妈妈的脸的图像，虽然他妈妈的脸经常会有一些畸变，但是婴儿仍然能够识别，除了“特征说”解释外，还有一种解释也可以是婴儿在大脑的匹配过程中，允许了对位乘矩阵偏离常量一定程度。因此，本文有可能引发图像匹配的新思路。要知道现在的人脸识别效果一直是不太好的。这就不能不让人怀疑“特征说”是否正确。

(3) 在物理学中的可能的应用

虽然笔者是物理学的外行。但是认为，如果将对位乘的想法用在物理学上，也许能够产生新的思路，一些原本被认为是标量的物理量，也许可以被认为是向量？

拿牛顿力学的第二定律来说，它的形式是 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$，就是说，一个质点在运动的时候，它所受到的力 $\boldsymbol{f}$ 与它的加速度 $\boldsymbol{a}$ 成正比，而 m 是这个质点的质量，也可以认为是比例常数。在这中间，力 $\boldsymbol{f}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 都是向量，而 m 被一直公认为是标量，因此上式我们看到了数 m 数乘向量 $\boldsymbol{a}$。

但是如果按照本文的观点，禁止数乘，则非要将m视为一个质量向量$\boldsymbol{m}=(m_x,m_y,m_z)$，这样一来力$\boldsymbol{f}$就成了质量向量$\boldsymbol{m}$与加速度向量$\boldsymbol{a}$的对位乘了，即$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{m}*\boldsymbol{a}$。当然，物理学家会指出如果这样，质量向量$\boldsymbol{m}$的各个分量总是常量，即$\boldsymbol{m}=(k,k,k)$。

但是，能不能考虑，在某种惯性系下，或者考虑到相对论效应，或者考虑到某种非惯性系中，质量向量的各个分量不再相等了呢？

当然，这种想法也有可能荒唐，但是无论如何提供了一些新的思路。

再比如说，空气的温度 T 实际上是各个气体分子的平均运动速度。但是，温度 T 经常被视为是标量的，为什么不能够在某种情况下视为向量呢？比如说在某个方向上的平均运动速度快一些？哪怕是在那个方向上分子不过是来回运动的幅度更大一些。

当然，笔者不是物理学家，所有这些想法未见得正确，不过是指出新的数学描述有可能导致新的思路而已。

4 结语

如果将传统的线性空间的数乘，视为是某种特殊的对位乘空间，是CBH二型空间的一种简化，则现在数学上被广泛使用的欧几里得空间，巴拿赫空间，希尔伯特空间[3]，就都成了陈必红空间的特例了。或者也可以认为是陈必红空间领导着这些空间。

因此，在本文出现之前，当数学教师们在课堂上，嘴里冒出一系列外国人的名字欧几里得，巴拿赫，希尔伯特等等的时候，今后也许可以认为，所有这些空间，最终都来源于一个以中国人的名字命名的空间，陈必红空间，终于有一个从未出过国，没有接受过任何外国人的训练，完全国内土生土长的数学家，给出了一个中国人自己的空间。这是改革开放快三十年之际在数学界出现的一件事情。

下面将会针对陈必红空间有许多进一步的研究，有许多定理将会被证明，这方面的论文将会有许多的。

[参考文献] **(References)**

[1] 沈永欢，梁在中，许履瑚，蔡倩倩. 实用数学手册[M]. 科学出版社，2001：464 页.
SHEN Y.H, LIANG Z.Z, XU L.H, CAI Q.Q. Pragmatic Mathematics Handbook[M]. Science Publishing house, 2001: p464. (in Chinese)

[2] 居于马. 线性代数[M]. 清华大学出版社，2002：175 页.
JU Y.M, Linear Algebra[M]. Tsinghua University Publishing house, 2001: p175. (in Chinese)

[3] 关肇直，张恭庆，冯德兴. 线性泛函分析入门[M]. 上海科学技术出版社，1979：141 页.
GUAN Z.Z, ZHANG G.Q, FENG D.X. Introduction to Linear Functional Analysis[M]. Shanghai Science and Technology Publishing house, 1979: p141. (in Chinese)

[4] 杜珣. 现代数学引论[M]. 北京大学出版社, 1996: 51 页.
Du X. Introduce to Modern Mathematical Theory[M]. Publishing house of Beijing University, 1996: p51. (in Chinese)

[5] 张禾瑞，郝柄新. 高等代数[M]. 高等教育出版社，2007：400 页.
ZHANG H.R, HAO B.X. Advanced Algebra[M]. High Education Publishing house, 2007: p400. (in Chinese)

[6] 易忠. 高等代数与解析几何[M]. 清华大学出版社，2007：67 页.
YI Z. Advanced Algebra and Analytical Geometry[M]. Tsinghua University Publishing house, 2007: p67. (in Chinese)