实数集的程序数子集

陈必红
深圳大学数学与计算科学学院，深圳（518026）
E-mail: cbhmath@hotmail.com

摘 要：实数集是不可数集，其中包括了有理数集和无理数集。无理数的小数部分是无限不循环的。本文定义了一个实数集的子集，叫程序数集，这个子集不仅包含有理数集，还包括了所有人类使用的无理数。这个子集形成一个数域，因此可以构成在此数域下的线性空间。这个子集是可数集，这就不会具有实数集的不可数集的那些相应的性质。此外，本文还提出了一个悖论，有助于人们更好地理解实数集。

关键词：集合论，数论，数域
中图分类号：O153.4

1. 引言

还是先研究[0,1)区间里的数。在这个区间里有有理数也有无理数，无理数就是无限不循环小数。但是，无理数的无限不循环数中，有的也是有规律的无限不循环，既然有规律，就可以编写一个 C 程序无限地逼近它。

例如，令 a=0.1101001000100001…，a 就是一个无限不循环小数，但是它是有规律的，头两个 1 之间没有 0，第二个和第三个 1 之间有一个 0，第三个到第四个 1 之间有两个 0，等等。既然有规律，就可以编写如下的一个 C++程序来逼近 a：

```
double nn1(int n){
        double s=0;
        int k=1;
        int j=1;
        for(int i=0;i<n;i++){
            s+=1/power(10,k);
            k+=j;
            j++;
        }
        return s;
}
```

上面的 C 函数 nn1 需要一个自变量 n 来代表所需的精度，将根据这个精度来返回 a 的近似值。

因此，从信息论的角度看，上面这段 C 程序共由 108 个字符构成，因此可以视为一个字符串。

这个字符串如果用通信手段发送给另一个 C++程序员，则他只需要分析这段程序，就可以知道这段程序是在描述一个数 a=0.1101001000100001…，也就是说，这段程序携带了这个无理数的完全的信息。

本帖子将这样的能够完全由一段C语言等字符串手段描述的数，称为程序数，用CBH来表示这个集合，并分析程序数的特点。当然，除用C语言描述的程序数外，下面还要讲到程序数还有其它的描述类型的。

2. 字串合并数

现在在计算机技术中，所有的信息都是用整数来表示的。计算机中处理得最多的数据类型，是字符串，简称字串。比如“AB”就是一个字串，在现在常用的 ASCII 编码中，字符

‘A’是用整数 16 进制的 0x41(在本文中十六进制数都用 C 语言的标准加上一个 0x 的前缀)来表示的，而字符‘B’则用 0x42 来表示，因此，对于字串“AB”，我们可以把它们的 16 进制数拼在一起，构成一个大的十六进制数 0x4142 来代表这个字串。而 0x4142 当然是一个整数。我们称之为字串“AB”的合并数。

再比如说，数字字符‘0’在 ASCII 编吗中是十六进制数 0x30 表示，而字符‘1’则用 0x31 表示，因此，对于自然数 10，我们也可以用字串“10”的合并数 0x3130 来代表它，也就是说，对于任何一个自然数，我们都可以先将它们用 ASCII 的字串表示，然后算出这个字串的合并数，称其为此自然数的合并数。在这种情况下，我们就建立了一个从自然数到它的合并数的映射。就是说，每给定一个自然数，就有一个相应的自然数，是它的合并数，与之对应。

而对于引言中给出的 C＋＋程序，这个源程序也是一系列字符构成的字串，因此也能够映射到它的合并数。因此，用这种办法我们就把一个无理数映射到了一个自然数，而且，这个自然数一定和上一自然段的全体自然数的各个合并数不一样。

还是从信息论角度考虑问题，如果一个方程只有一个解，则这个方程就已经等于携带了这个解的全部信息。如果这个解是一个无理数。则我们把这个方程发送给一个数学家，他就能够根据方程唯一地确定我们要发送给他的无理数是什么。

例如，当我们打算把无理数 $\sqrt{2}$ 发送给对方时，我们只需要把代表一个方程的字串“x•x=2”发送给对方，对方就知道我们要告诉他的是无理数 x= $\sqrt{2}$ 。也就是说，字串“x•x=2”携带了实数 $\sqrt{2}$ 的全部信息，信息接收者可以根据这个信息编写程序，以任意的精度获得它的近似值。但是字串“x•x=2”的合并数是自然数，因此，我们在这里把实数 $\sqrt{2}$ 也映射到了一个自然数上。

如果我们想发送给对方圆周率π，因此我们告诉对方“任何一个平面上的圆的周长比上直径”，这个字串携带了π的全部信息，因此这里也就用此字串的合并数代表了实数π。

3. 程序数的定义

定义 1　在实数集 R 中，凡是能够用有限长度的字串完全表示其信息的数，被称为程序数，这些数的集合，构成了 R 的一个子集，用 CBH 表示。

由此定义，知道所有的整数，有理数，及相当一部分无理数，都是程序数。

因此，程序数一定能够用一个有限长度的字串表示，这个字串是不是唯一的呢？要知道，上一节用了各种方法，产生的字串规则是不一样的，比如直接用数字表示，或者用方程表示，或者用一句话表示，或者用一个 C＋＋程序表示，它们之间会不会导致恰巧有两个程序数映射到同一字串上呢？一般不会的，但为了防止这一点，也可以在不同的字串描述前面加一个说明性前缀，用 C＋＋语言的注释符号“/**/”来表明，比如“/*数字*/123”代表自然数 123，“/*方程*/x•x=2”代表 $\sqrt{2}$ ，“/*文字描述*/任何一个平面上的圆的周长比上直径”代表圆周率π，等等。当然，同一个程序数，可能有不同的表示办法，因此有可能同时映射到多个自然数上。

而字串的唯一性，导致了字串的合并数的唯一性，因此就可以把任何一个程序数映射到至少一个自然数上了。

因此我们有

定理 1　对于程序数集合 CBH，存在着一个单射将其映射到自然数集合 N，就是说，对于每一个程序数，唯一地有一个自然数与其对应。

因此进一步地有

定理 2　程序数集合 CBH 是可数集合。(参见[1])

还容易知道

定理 3　程序数集合 CBH 对于加、减、乘、除四则运算封闭。

也就是说，任何两个程序数的相加，相减，相乘，相除，得到的结果，仍然是程序数。

这就构成

定理 4　程序数集合 CBH 是一个数域。

因此，可以拿程序数来作为数域构成一个线性空间。

一个问题是，程序数数列的极限如果存在，它是不是程序数呢？一般不是。因为我们知道任意实数都可以用有理数序列逼近，就知道这一点了。

尤其是，因为自然数 N 的测度为 0，因此程序数集合 CBH 的测度也就是 0。

但是，如果一个程序数数列本身是有规律的，或者说，这个数列可以用有限字长的字串来描述（哪怕这字串是一本书），则这样的数列的极限，也就是程序数了。

而在实用中，经常需要描述的极限值，常常是微分方程（包括常微分方程和偏微分方程）的解函数，在某一点上的函数值，这当然是可以用有限字长的字串描述的，因此，可以认为

定理 5　任何一个可用有限字长的字串描述的微分方程的解在相应的线性空间中的任何一点的函数值，是程序数。

因为程序数为可数个，程序数的测度为零，所以程序数只是实数集合 R 中的很小一部分。但是，人类社会似乎只是和程序数打交道，因为每一个人的生命有限，他所处理的信息量，接收的信息量，都有限。

4. 一个悖论

定义 2　将实数集合 R 中的不属于程序数 CBH 的所有数构成的集合，称为非程序数。

但是，我们怎么能够知道非程序数是存在的呢？当然可以从测度的角度出发来相信这一点。

但是，正如当年物理学家分成了两派，有一派不相信镭这种元素的存在，虽然另一派用严格的理论办法证明了镭的存在，但是这一派不信啊，因此就要求另一派拿出一克具体的镭来看一看。于是就有了居里夫人炼出一克镭的佳话。

但是，如果我这里给出如下一个悖论

悖论　非程序数不存在。

而且我坚持要求反对者给出一个具体的非程序数给我看一看，那么反对者就麻烦了。

因为，如果他要驳倒我，他要拿出一个数，这个数他完全地描述了，而且证明了它的确是非程序数。但是我要问了，你写的这篇论文，或者书，是无限字长的么？如果那样，你一辈子也写不完。而如果是有限字长的，你又把那个数描述清楚了，那么它就是程序数，而不是非程序数。

这和当年不一样，当年有人提出悖论非有理数不存在，则有人拿出了 $\sqrt{2}$，就成功地证明了非有理数的存在。但是，非程序数就没有办法这么做。

甚至如果我认为，在概率论的试验中，我的样本空间就是程序数集呢？这下麻烦了，因为程序数集的测度是零，则广义测度也是不好定义的了。

5. 结语

本文提出了一个人类社会基本上用它的程序数数集 CBH，但是，由此会引出一系列的麻烦，这些麻烦今后都是需要进行研究和讨论的。程序数是有意义的，因为，它是人类社会能够直接接触到的所有实数，而且是可数集合。

参考文献

[1] 杜珣. 现代数学引论. 北京大学出版社, 1996: 37 页.

A Program Number Subset of the Real Number Set

CHEN Bihong

College of Mathematics of Shenzhen University, Shenzhen, PRC
(518026)

Abstract

It is well known that real number set is uncountable, and it include rational number and irrational number. Irrational numbers have decimal expansions that neither terminate nor become periodic. In this paper a subset of real number set is defined, it is called program number set. The set include all rational numbers, and also include irrational numbers used by human being. The set forms a number field, so can construct a linear space on it. The set is countable set, so it does not have the features owned by real number set.

Keywords: set, number theory, number field

References

[1] Du Xun. Introduce to modern mathematical theory. Publishing house of BeiJing University, 1996: p37.

作者简介：陈必红，男，1955 年生，清华大学博士，主要研究方向是观测过程理论，信息论基础理论。